



Herbstakademie Mathematik

Wiesbaden, 23. - 27. Oktober 2023

**Beauty is the first test:
there is no permanent
place in the world for
ugly mathematics.**

**Godfrey Harold Hardy
(1877-1947)**

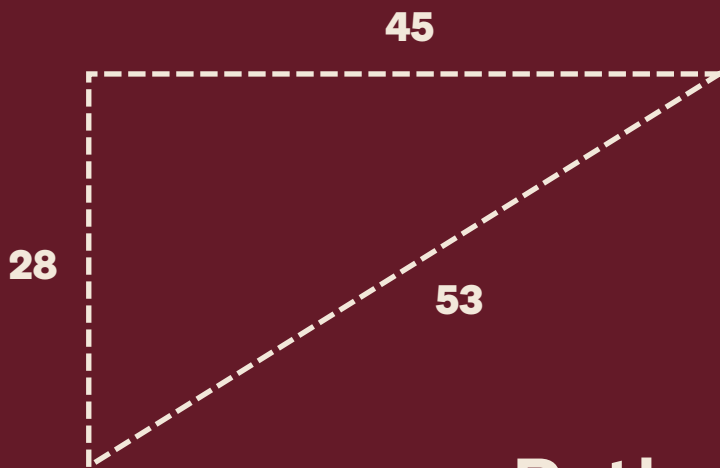
Übersicht

Die Herbstakademie richtet sich an mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler der Oberstufe. Ziel ist es, anhand interessanter Probleme das Wechselspiel zwischen verschiedenen mathematischen Disziplinen zu erleben: Zahlentheorie, Algebra, Geometrie, Analysis.

Über die einzelnen Themen hinaus werden wir zwanglos und in spielerischer Weise allgemeine Begriffe und Methoden kennenlernen, die sich auch auf andere Probleme anwenden lassen. Dadurch erhalten wir ein Gespür für den Zusammenhang zwischen konkreten Fragestellungen und abstrakten Begriffen in der Mathematik. Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt.

- Beweismethoden:
vollständige Induktion, unendlicher Abstieg, Schubfachprinzip
- Rechentechniken:
Euklidischer Algorithmus, Polynomgleichungen, Matrizenrechnung
- Erweiterungen des Zahlbegriffs:
Komplexe Zahlen, Gaußsche ganze Zahlen, Restklassen
- Geometrie:
Parametrisierte Kurven, Grundidee der projektiven Geometrie
- Algebraische Strukturen:
Gruppen, Ringe, Körper

Die Herbstakademie wird geleitet von Prof. Dr. Karlheinz Spindler ([↳ Video](#))
von der Hochschule RheinMain.



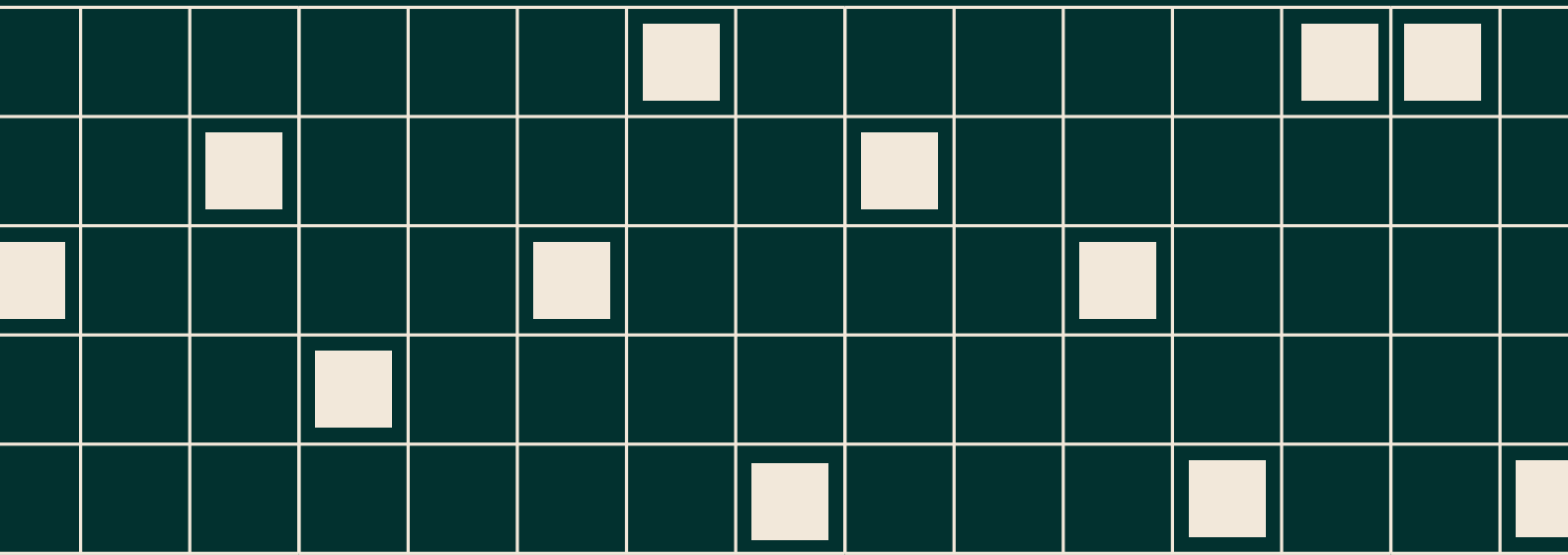
Pythagoräische Zahlentripel

Die hier betrachtete Fragestellung ist ganz einfach:
Bestimme alle Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen mit

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

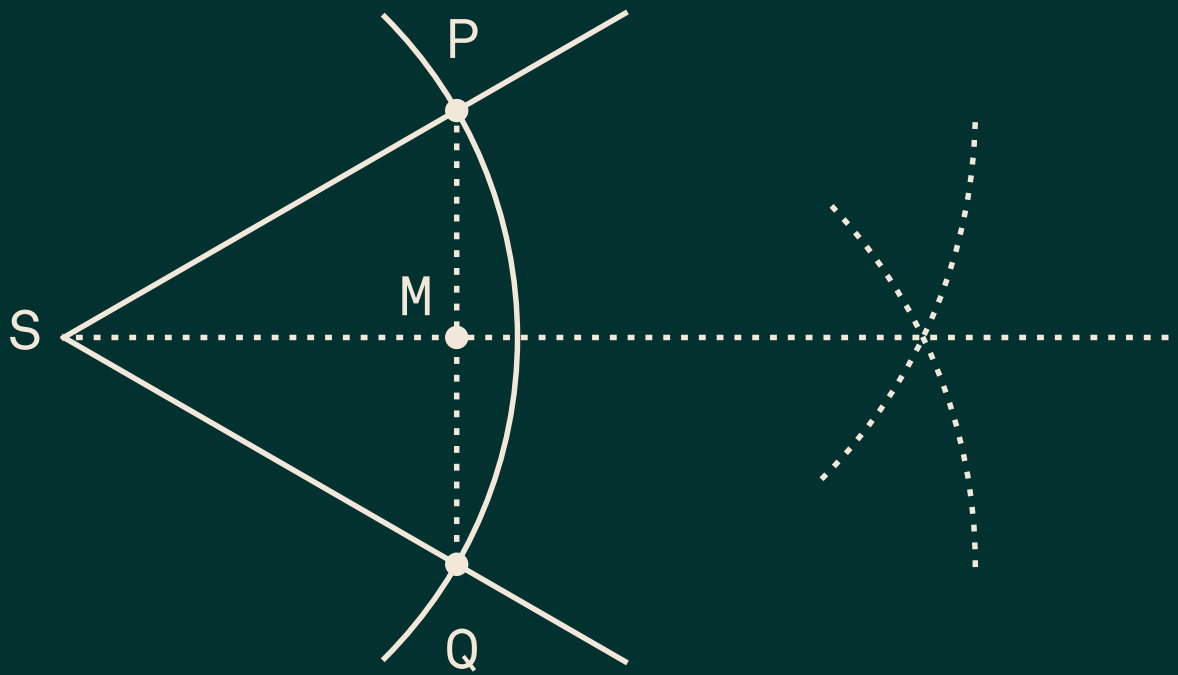
Geometrisch ausgedrückt: Finde alle rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen. Beispiele sind etwa $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(15,8,17)$ und $(7,24,25)$.

Wir werden drei verschiedene Lösungen des Problems betrachten: eine zahlentheoretische, eine geometrische und eine algebraische. Als Folgerung werden wir die Unlösbarkeit der Gleichung $x^4 + y^4 = z^2$ im Bereich der natürlichen Zahlen nachweisen.



Körperbegriff mit Anwendungen

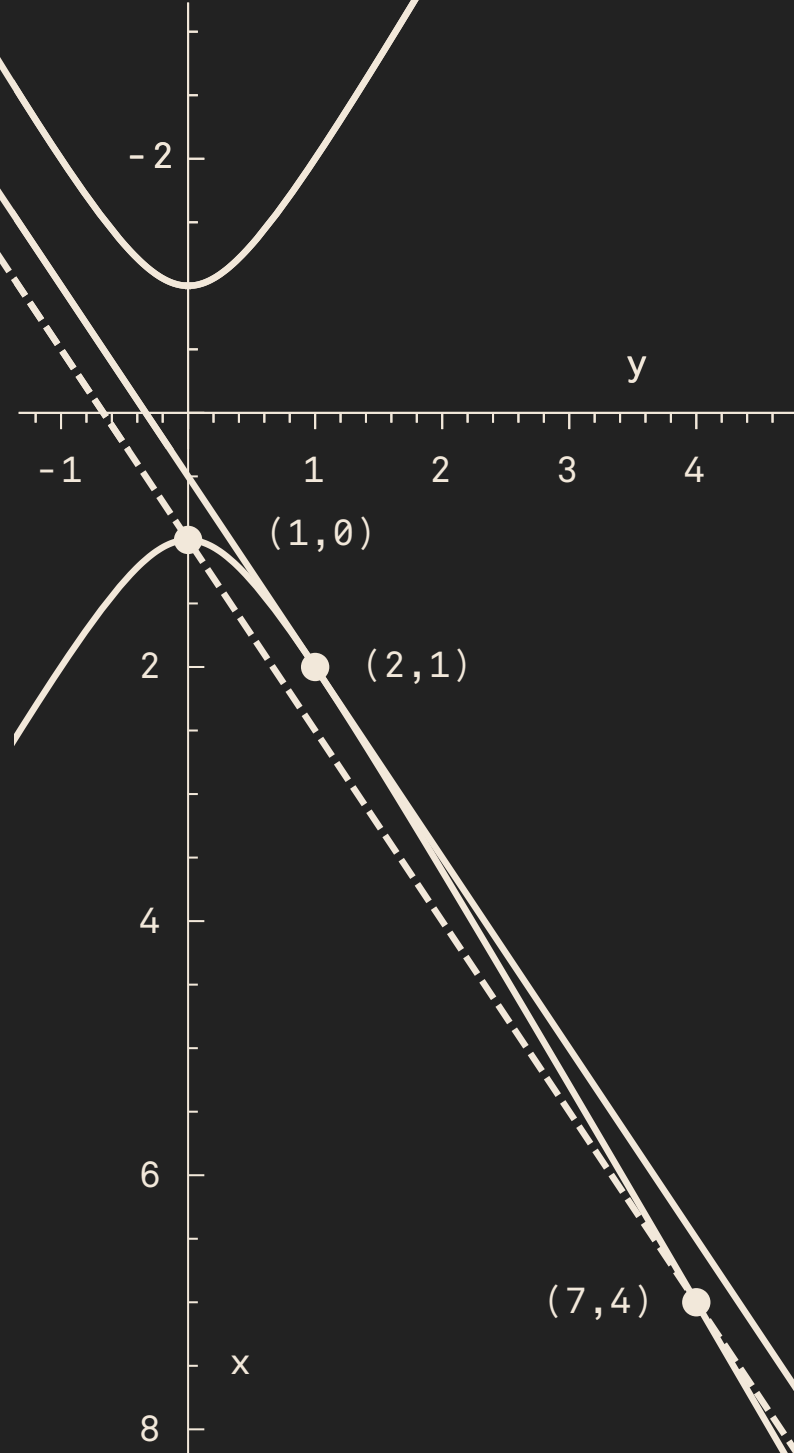
Ein „Körper“ im Sinn der Algebra ist ein Rechenbereich, in dem die Grundrechenarten unbegrenzt ausführbar sind. (Beispiele sind die rationalen und die reellen Zahlen, aber es gibt auch endliche Körper.) Wie stark dieser Begriff ist, sehen wir an drei Beispielen aus ganz unterschiedlichen Bereichen: beim Lösen linearer Gleichungssysteme, bei einer Analyse des Computerspiels „Lights Out“ und bei der Frage, warum man mit Zirkel und Lineal einen beliebigen Winkel zwar halbieren, aber nicht dritteln kann.



Pellsche Gleichung

Eine natürliche Zahl n sei gegeben; wir suchen alle ganzzahligen Lösungen (x,y) der Gleichung $x^2 - ny^2 = 1$. Manchmal findet man durch Probieren schnell eine Lösung (etwa für $n = 2$ oder $n = 3$), manchmal auch nicht. (Man probiere es für $n=109$!)

Es ist auch gar nicht klar, ob es für jede Zahl n neben den trivialen Lösungen $(1,0)$ und $(-1,0)$ überhaupt eine weitere Lösung gibt. Eine allgemeine Lösung gelingt mit neuen Ideen und Begriffen, die über die elementare Zahlentheorie hinausgehen.

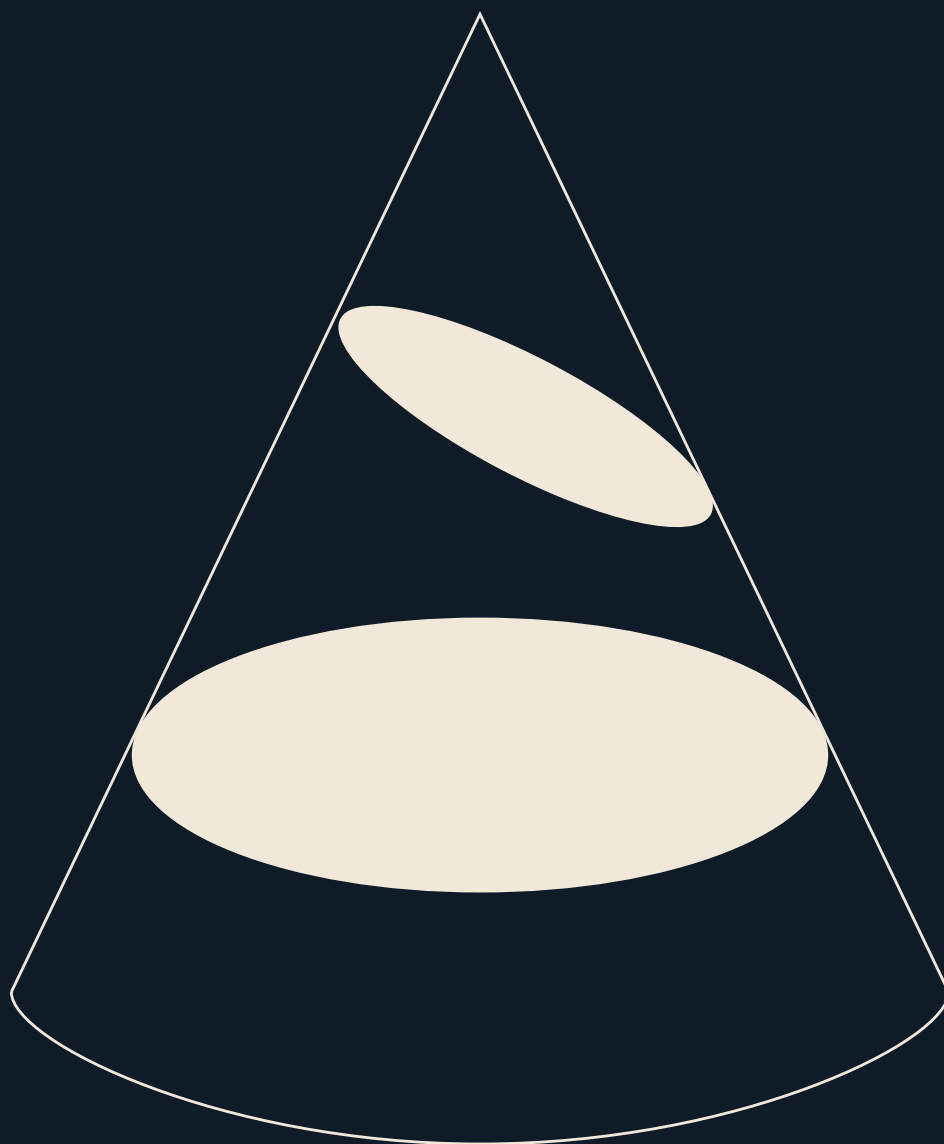


Arithmetik auf Kegelschnitten und elliptischen Kurven

Kegelschnitte (also Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln) lassen sich durch quadratische Gleichungen beschreiben, und elliptische Kurven sind Kurven, die sich durch Polynomgleichungen dritten Grades darstellen lassen.

Merkwürdigerweise handelt es sich bei diesen Kurven nicht nur um geometrische, sondern auch um algebraische Objekte: Man kann mit den Punkten auf solchen Kurven rechnen. (Das wird heutzutage bei der Verschlüsselung von Daten benutzt, etwa im Online-Banking.)

Wir werden einige einführende Beispiele betrachten und ein Gefühl für das Rechnen auf Kegelschnitten und elliptischen Kurven erhalten.



Knobelaufgaben zum Thema



Eine Aufgabe aus dem *Sunday Telegraph*

Der *Sunday Telegraph* in London veranstaltet jährlich ein Neujahrsquiz. Im Jahr 1995 wurden dabei u.a. die beiden folgenden Aufgaben gestellt (wobei für die Lösung der zweiten Aufgabe ein Sonderpreis von 450 Pfund ausgeschrieben wurde).

Aufgabe 1

Finde natürliche Zahlen A, B, C, D unter 100, die die Gleichung $(A/B)^3 + (C/D)^3 = 6$ erfüllen.

Aufgabe 2

Finde entweder teilerfremde natürliche Zahlen A, B, C und D größer als 100, die ebenfalls diese Gleichung erfüllen, oder beweise die Nichtexistenz solcher Zahlen.

Eine Aufgabe aus dem *Strand Magazine*

Die Zeitschrift *Strand Magazine*, benannt nach ihrem Erscheinungsort, der Londoner Straße *Strand*, erschien monatlich zwischen 1891 und 1950 und war die führende britische Literaturzeitschrift. Neben vielen Erzählungen (u.a. Sherlock-Holmes-Geschichten) prägten die Verwendung zahlreicher Illustrationen und die Einbeziehung mathematischer Knobelaufgaben den Charakter der Zeitschrift. Die folgende Aufgabe erschien in der Dezemberausgabe 1914 dieser Zeitschrift.

Ein Mann lebt in einem Haus in einer langen Reihe von Häusern, die von links nach rechts die Nummern 1, 2, 3, 4, ... tragen. Die Anzahl der Häuser ist größer als 50 und kleiner als 500. Der Mann macht die folgende Beobachtung: Die Summe der Nummern der Häuser links von ihm stimmt überein mit der Summe der Nummern der Häuser rechts von ihm.

Bestimme die Anzahl der Häuser und die Nummer des Hauses, in dem der Mann lebt.

Organisatorisches

Leitung Prof. Dr. Karlheinz Spindler ([↳Video](#)), Hochschule RheinMain

Zeiten 23.-27. Oktober 2023, jeweils 9:30-16:30 (mit Pausen)

Ort Diltheyschule, Georg-August-Straße 16, 65195 Wiesbaden

Anfahrt **ESWE**

Linien 1, 3 und 33, Haltestelle Dürerplatz

Linien 2, 14 und 48, Haltestelle Elsässer Platz / Hochschule RheinMain

E-Linien morgens / mittags, Haltestelle Zietenring / Hochschule RheinMain

Linien 4, 17, 18, 23, 24, 27 und 45, Haltestelle Loreleiring

RMV

Linien 225, 245, 271 und 274, Haltestelle Dürerplatz

Linien 275 und X76, Haltestelle Hochschule RheinMain

Die Haltestellen Zietenring, Dürerplatz, Elsässer Platz und Hochschule RheinMain sind nur wenige Gehminuten von der Diltheyschule entfernt, die Haltestelle Loreleiring etwa 15 Minuten.

Es wird keine Teilnahmegebühr erhoben. Mittagessen gibt es in der Mensa der Hochschule RheinMain. Anmeldung bitte per Email unter Angabe des Namens, der Schule und der Klassenstufe an:

karlheinz.spindler@hs-rm.de

Herbstakademie Mathematik
Wiesbaden, 23. - 27. Oktober 2023